



GA Ejercicio 23.5: Deducir y discutir la ecuación ordinaria $x^2 = 4py$.

Solución:

1.- Definimos los elementos iniciales:

Si suponemos que se trata de una parábola vertical cuyo vértice está en el origen $V(0,0)$

- Colocamos el **foco (F)** sobre el eje (Y) a una distancia (**p**) del origen: $F(0, p)$.
- La **directriz (D)** será una recta horizontal opuesta al foco, a la misma distancia "p" del origen: $y = -p$ [o en su forma general: $(y + p = 0)$].

2.- Aplicamos las condiciones geométricas del problema:

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera que pertenece a la parábola. Por definición, la distancia de P al foco F debe ser igual a la distancia de P a la recta directriz D, por lo tanto : $d(P,F)=d(P,D)$

3.- Aplicamos las fórmulas de distancia entre dos puntos:

- Distancia entre dos puntos P y F:
$$d(P,F) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$$
- Distancia de un punto P a una recta horizontal $y = -p$:
$$d(P,D) = |y - (-p)| = |y + p|$$

4.- Igualamos las ecuaciones y resolvemos algebraicamente:

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p| \rightarrow x^2 + (y - p)^2 = (y + p)^2 \rightarrow x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

Cancelamos los términos en ambos lados “ y^2 y p^2 ” y despejamos a x^2

$$x^2 - 2py = 2py \rightarrow x^2 = 2py + 2py$$

Por lo tanto tenemos que: $x^2 = 4py$, Hemos deducido con éxito la ecuación ordinaria.

5.- Discusión del Lugar Geométrico

Para entender el comportamiento de la curva matemática expresada por $x^2 = 4py$, analizamos sus cuatro propiedades fundamentales:

A. Intersecciones con los Ejes

- Si hacemos $x = 0$, obtenemos $0 = 4py \Rightarrow y = 0$.
- Si hacemos $y = 0$, obtenemos $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$.

La parábola interseca a ambos ejes exclusivamente en el origen, lo que confirma que su **vértice es $V(0,0)$** .

B. Simetría

Sustituimos “ x ” or “ $-x$ ” en la ecuación original:

$$(-x)^2 = 4py \Rightarrow x^2 = 4py$$

Como la ecuación no cambia, la curva es **simétrica respecto al eje Y** (el eje de ordenadas). Esto significa que el eje Y actúa como el **eje focal** o eje de simetría de la parábola.

C. Extensión y Sentido de Apertura

Al despejar la variable cuadrática tenemos $x = (4py)^{1/2}$. Para que x sea un número real, el radicando debe ser mayor o igual a cero ($4py \geq 0$). Esto divide el análisis según el signo del parámetro matemático p (donde $p \neq 0$):

- **Si ($p > 0$):** Para que $4py \geq 0$, la variable y obligatoriamente debe ser mayor o igual a cero ($y \geq 0$). La curva existe únicamente en el **primer y segundo cuadrante** y se extiende infinitamente **hacia arriba**.
- **Si ($p < 0$):** Para que el producto sea positivo, debe tomar valores menores o iguales a cero ($y \leq 0$). La curva existe en el **tercer y cuarto cuadrante** y se extiende infinitamente **hacia abajo**.

D. Longitud del Lado Recto

El lado recto es la cuerda perpendicular al eje focal que pasa por el foco. Si sustituimos la altura del foco $y = p$ en la ecuación:

$$x^2 = 4p(p) \Rightarrow x^2 = 4p^2 \Rightarrow x = \pm 2p$$

Los extremos del lado recto son $L(-2p, p)$ y $R(2p, p)$. La distancia entre ellos (longitud) es el valor absoluto de su diferencia en x :

$$LR = |2p - (-2p)| = |4p|.$$

Gráfica de la Parábola

