



M.A.S Ejercicio 12.5: Una partícula cuya masa es de 1 g vibra con movimiento armónico simple de 2 mm de amplitud. Su aceleración en el extremo de su recorrido es de $8,0 \times 10^3 \text{ m / s}^2$. Calcular la frecuencia del movimiento y la velocidad de la partícula cuando pasa por la posición de equilibrio y cuando la elongación es de 1,2 mm. Escribir la ecuación que expresa la fuerza que actúa sobre la partícula en función de la posición y del tiempo.

Solución:

Datos del problema

- Masa de la partícula: $m = 1 \text{ g} = 1 \times 10^{-3} \text{ kg}$
- Amplitud del movimiento: $A = 2 \text{ mm} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}$
- Aceleración máxima (en el extremo): $8,0 \times 10^3 \text{ m / s}^2$

Desarrollo paso a paso

Cálculo de la Frecuencia del movimiento (f)

En un movimiento armónico simple, la aceleración máxima se calcula con la fórmula:

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A$$

1. Despejar y calcular la frecuencia angular (ω):

$$\omega^2 = a_{\text{max}} / A = (8,0 \times 10^3 \text{ m / s}^2) / (2 \times 10^{-3} \text{ m}) = 4 \times 10^6 \text{ rad}^2 / \text{s}^2 = 2000 \text{ rad} / \text{s}^{-1}$$

2. Calcular la frecuencia (f):

$$f = \omega / 2 \pi = (2000 \text{ rad} / \text{s}^{-1}) / 2 \pi = 318,31 \text{ Hz}$$

Velocidad de la partícula (v)

La ecuación de la velocidad para cualquier posición x es (ver nota):

$$v(x) = \omega (\sqrt{A^2 - x^2}).$$

A.- Cuando pasa por la posición de equilibrio ($x = 0$), la velocidad es máxima:

$$v_{\text{máx}} = \omega A = (2000 \text{ rad/s}) (2 \times 10^{-3} \text{ m}) = 4 \text{ m/s}$$

B.- Cuando la elongación es $x = 1,2 \text{ mm} = 1,2 \times 10^{-3} \text{ m}$, la velocidad es:

$$v = 2000 \text{ rad/s} \sqrt{(2 \times 10^{-3} \text{ m})^2 - (1,2 \times 10^{-3} \text{ m})^2}, v = 2000 \text{ rad/s} \sqrt{4 \times 10^{-6} - 1,44 \times 10^{-6}} = 2000 \text{ rad/s} \sqrt{2,56 \times 10^{-6}} = (2000 \text{ rad/s}) (1,6 \times 10^{-3}) = 3.2 \text{ m/s}$$

Ecuaciones de la fuerza que actúa sobre la partícula

Por la segunda ley de Newton y la ley de Hooke, la fuerza recuperadora es $F = -k \cdot x$, donde la constante elástica es $k = m \cdot \omega^2$.

- **Calculamos la constante k:**

$$k = (1 \times 10^{-3} \text{ kg}) (2000 \text{ rad/s})^2 = (1 \times 10^{-3} \text{ kg}) (4 \times 10^6 \text{ rad}^2/\text{s}^2) = 4000 \text{ N/m}$$

(a) En función de la posición (x):

$$F(x) = (-4000 \text{ N/m}) (x)$$

(b) En función del tiempo (t):

Asumiendo un inicio en la posición de equilibrio ($x(t) = A \sin(\omega t)$), de donde:

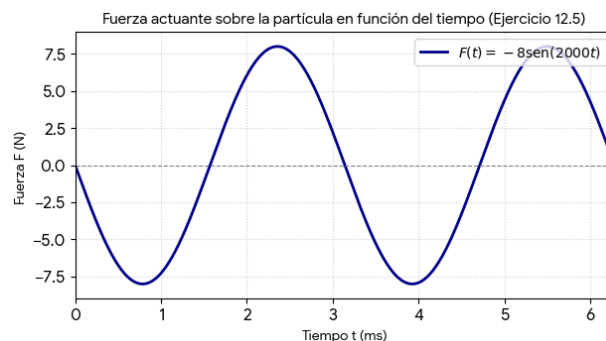
$$x(t) = 2 \times 10^{-3} \cdot \sin(2000t)$$

Sustituyendo $x(t)$ en la ecuación de la fuerza:

$$F(t) = -4000 \cdot [2 \times 10^{-3} \cdot \sin(2000t)] = -8 \cdot \sin(2000t)$$

Gráfico del Ejercicio

A continuación, se muestra cómo varía la **fuerza restauradora** en función del **tiempo** durante los dos primeros ciclos del movimiento:



Nota:

¿De dónde obtenemos $v(x) = \omega (\sqrt{A^2 - x^2})$?:

Aquí tienes el desarrollo matemático paso a paso:

La posición x de un cuerpo en Movimiento Armónico Simple en función del tiempo se define como:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \Phi_0)$$

La **velocidad** es la primera derivada de la posición con respecto al tiempo ($v = dx/dt$).

Aplicando tenemos:

$$v(t) = \frac{d}{dt} [A \cos(\omega t + \phi)]$$

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

Para expresar la velocidad en función de la posición x en lugar del tiempo t , utilizamos la identidad trigonométrica:

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

Despejando **sin θ** obtenemos:

$$\sin(\theta) = \pm \sqrt{1 - \cos^2(\theta)}$$

Sustituyendo $\theta = \omega t + \Phi$, la ecuación de la velocidad queda así:

$$v = -A\omega (\pm \sqrt{1 - \cos^2(\omega t + \phi)})$$

De la **ecuación original de la posición**, despejamos el coseno:

$$\cos(\omega t + \phi) = \frac{x}{A}$$

Ahora sustituimos este valor dentro de nuestra raíz en la ecuación de la velocidad:

$$v = \pm A\omega \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}$$

Introducimos la amplitud **A** dentro de la raíz cuadrada (entra como A^2) para simplificar:

$$v = \pm \omega \sqrt{A^2 \left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right)}$$