6.- Calcular el área de la superficie encerrada por la siguiente curva ρ =2-Cos θ.

Solución:

La curva ρ =2-Cos θ, es un caracol (o limaçon) y para calcular el área de esta curva utilizamos la ecuación:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [\rho(\theta)]^2 \, d\theta$$

- Establecemos los límites de integración:

Dado que el caracol se completa en un ciclo, los límites de integración van desde 0°hasta 180° (2π), así que estos son los límites de integración.

Sustituimos la función ρ en la fórmula y elevamos al cuadrado:

$$A = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} (2-\cos\theta)^2 \, d\theta$$

Resolvemos el binomio, obteniendo:

$$(2-\cos\theta)^2 = 4 - 4\cos\theta + \cos^2\theta$$

Sustituyendo en la integral tenemos:

$$A = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} (4 - 4\cos\theta + \cos^2\theta) \, d\theta$$

Para poder resolver esta integral necesitamos aplicar la siguiente identidad trigonométrica $\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$:

Sustituyendo en la integral tenemos:

$$A = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} \left(4 - 4\cos\theta + \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right) d\theta$$